

4 Divisibilità tra polinomi e teorema di Ruffini

ESERCIZI pag. 409



Definizione

Un polinomio $A(x)$ è **divisibile** per un polinomio $B(x)$ quando il resto della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ è zero.

Se il polinomio $B(x)$ ha grado maggiore di uno, non esistono criteri universali per stabilire se il polinomio $A(x)$ è divisibile per il polinomio $B(x)$.

Esiste, invece, un criterio per stabilire se il polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio $B(x)$ di primo grado, del tipo $x - a$.

Teorema **TEOREMA DI RUFFINI**

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $A(x)$ sia divisibile per il binomio $B(x) = x - a$ è che $A(a) = 0$.

Dimostriamo la condizione necessaria.

Ipotesi	Tesi
$A(x)$ è divisibile per $x - a$.	$A(a) = 0$

Dimostrazione

Applicando il teorema del resto otteniamo $R = A(a)$.
Per ipotesi, $A(x)$ è divisibile per $x - a$, pertanto $R = 0$.
Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(a) = 0$.

c.v.d.

Dimostriamo la condizione sufficiente.

Ipotesi	Tesi
$A(a) = 0$	$A(x)$ è divisibile per $x - a$

Dimostrazione

Applicando il teorema del resto otteniamo $R = A(a)$.
Per ipotesi, $A(a) = 0$.
Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $R = 0$.
Pertanto, per la definizione di divisibilità tra polinomi, $A(x)$ è divisibile per $x - a$. **c.v.d.**



OSSERVA

In altre parole: $A(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se $A(a) = 0$.

ESEMPIO

Verifichiamo che il polinomio $A(x) = 4x^2 - x - 3$ è divisibile per $B(x) = x - 1$.

► $A(1) = 4 - 1 - 3 = 0$. Dunque $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Ricordando che il resto della divisione di un polinomio per il binomio $kx - a$ (con $k \neq 0$ e $k \neq 1$) è il valore che si ottiene sostituendo alla variabile x il valore $\frac{a}{k}$, concludiamo che il polinomio $A(x)$ è divisibile per il binomio $kx - a$ se e solo se $A\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

ESEMPIO

Verifichiamo che il polinomio $A(x) = 6x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 2$ è divisibile per $B(x) = 3x - 2$.

► $A\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{48}{27} - \frac{20}{9} + \frac{22}{9} - 2 = 0$. Dunque $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.