3 Teorema del resto

ESERCIZI pag. 407

Abbiamo visto che la divisione

$(3x^3 - 2x^2 + 1) : (x + 2)$

ha quoziente $Q(x) = 3x^2 - 8x + 16$ e resto $R = -31$. Possiamo allora scrivere:

$3x^3 - 2x^2 + 1 = (x + 2) \cdot (3x^2 - 8x + 16) - 31$

Se nel polinomio $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ sostituiamo a x il termine noto, cambiato di segno, del binomio $x + 2$, otteniamo:

$A(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 + 1 = -24 - 8 + 1 = -31$

cioè il resto della divisione tra i polinomi $3x^3 - 2x^2 + 1$ e $x + 2$.

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi nella variabile x, con $B(x)$ polinomio non nullo e di primo grado del tipo $x - a$. Il seguente teorema ci permette di determinare, senza eseguire la divisione, il resto della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$.

Teorema **TEOREMA DEL RESTO**

Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ nella variabile x per il binomio $B(x) = x - a$ è $A(a)$, cioè il valore che il polinomio $A(x)$ assume quando alla lettera x si sostituisce il numero a, opposto del termine noto del divisore $B(x)$.

Dimostrazione

Eseguendo la divisione tra i due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ si ha:

$A(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R,$

con R numero reale, essendo il suo grado minore del grado di $B(x)$, che è 1.

Sostituendo alla variabile x il valore a, cioè il termine noto cambiato di segno del binomio $x - a$, otteniamo:

$A(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R,$

da cui $A(a) = R$. **c.v.d.**

Calcoliamo, come esempio, il resto di alcune divisioni, senza svolgere l'operazione.

ESEMPI

1. $(x^3 - 2x^2 + 4x + 1) : (x - 2) \quad \rightarrow \quad R = A(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 + 8 + 1 = 9$
2. $(x^4 - 2x^2 - 2x - 1) : (x + 1) \quad \rightarrow \quad R = A(-1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$
3. $(x^3 - 2a^2x + 4ax^2 - 7a^3) : (x - a) \quad \rightarrow \quad R = A(a) = a^3 - 2a^3 + 4a^3 - 7a^3 = -4a^3$

Il teorema del resto può essere applicato anche nel caso in cui il binomio $B(x)$ è del tipo $kx - a$, con $k \neq 0$ (se k fosse 0 avremmo solo un numero) e $k \neq 1$ (il caso $k = 1$ è quello che abbiamo già visto).
Infatti, consideriamo l'uguaglianza:

$A(x) = Q(x) \cdot (kx - a) + R.$

$kx - a$ si annulla per $x = \frac{a}{k}$. Sostituendo a x il valore $\frac{a}{k}$, si ottiene:

$A\left(\frac{a}{k}\right) = Q\left(\frac{a}{k}\right) \cdot 0 + R,$

dunque $A\left(\frac{a}{k}\right) = R.$

ESEMPI

1. $(5x^3 - 11x^2 - 3x + 4) : (5x - 1) \quad \rightarrow \quad R = A\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25} - \frac{11}{25} - \frac{3}{5} + 4 = 3$
2. $\left(-2x^3 + 17x^2 - 8x + \frac{1}{2}\right) : (1 - 2x) \quad \rightarrow \quad R = A\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{17}{4} - 4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$