2 La regola di Ruffini

ESERCIZI pag. 402

Se il polinomio divisore è un binomio di primo grado che ha il coefficiente del termine di primo grado uguale a 1, si possono determinare il quoziente e il resto della divisione applicando la **regola di Ruffini**.

Spieghiamo la regola eseguendo la divisione: $(3x^3 - 2x^2 + 1) : (x + 2)$.

1. Si pongono, nella prima riga dello schema accanto, i coefficienti del polinomio dividendo, ordinato secondo le potenze decrescenti della variabile, inserendo degli zeri se il polinomio non è completo e ponendo il termine noto oltre la seconda riga verticale.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2. Si scrive il termine noto del divisore, cambiato di segno, nella seconda riga, a sinistra della prima linea verticale.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Si riporta il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio divisore in basso, sotto la linea orizzontale, nella terza riga.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & \downarrow & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

4. Si moltiplica il numero -2 per il numero 3 appena scritto e si scrive il risultato sotto il -2, che è il secondo coefficiente. Si sommano i valori incolonnati e si scrive il risultato sotto di essi, al di sotto della linea.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & \downarrow & -6 & & \\ \hline & 3 & -8 & & \end{array}$$

5. Si moltiplica il numero -2 per il numero -8 appena scritto e si scrive il risultato sotto lo 0, che è il terzo coefficiente. Si sommano i valori incolonnati e si scrive il risultato sotto di essi, al di sotto della linea.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & & -6 & 16 & \\ \hline & 3 & -8 & 16 & \end{array}$$

6. Si moltiplica il numero -2 per il numero 16 appena scritto e si scrive il risultato sotto l'1, che è il termine noto del polinomio dividendo. Si sommano i valori incolonnati e si scrive il risultato sotto di essi, al di sotto della linea.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & & -6 & 16 & -32 \\ \hline & \underbrace{3 \quad -8 \quad 16}_{\text{coefficienti del quoziente}} & & & \underbrace{-31}_{\text{resto}} \end{array}$$

I valori 3, -8 e 16 sono i coefficienti del polinomio quoziente. Il grado di tale polinomio è 2, cioè la differenza dei gradi del polinomio dividendo e del polinomio divisore. Pertanto il quoziente della divisione è $Q(x) = 3x^2 - 8x + 16$ e il resto è $R = -31$. Concludendo, possiamo scrivere:

$$3x^3 - 2x^2 + 1 = (x + 2)(3x^2 - 8x + 16) - 31.$$

ESEMPIO

Eseguiamo, utilizzando la regola di Ruffini, la divisione $(2x^3 - 7x - 2) : (x - 2)$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & -7 & -2 \\ +2 & & 4 & 8 & 2 \\ \hline & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

▶ Il quoziente della divisione è $Q(x) = 2x^2 + 4x + 1$ e il resto è $R = 0$.
Ciò vuol dire che il polinomio $2x^3 - 7x - 2$ è divisibile per il binomio $x - 2$.

CHI È?

Paolo Ruffini (1765-1822), medico e matematico italiano, si dedicò allo studio dell'algebra e delle equazioni algebriche.

OSSERVA

Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio $B(x)$ di primo grado è un numero, dunque $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R$.

Se il divisore è un polinomio di primo grado con coefficiente del termine di primo grado diverso da uno, possiamo ugualmente eseguire la divisione con la regola di Ruffini. Questo è possibile applicando la proprietà invariantiva. Per tale proprietà, infatti, dividendo per uno stesso numero n diverso da zero entrambi i membri dell'uguaglianza

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R \qquad [1]$$

otteniamo:

$$\frac{A(x)}{n} = \frac{B(x) \cdot Q(x)}{n} + \frac{R}{n} \quad \text{o anche:} \quad \frac{A(x)}{n} = \frac{B(x)}{n} \cdot Q(x) + \frac{R}{n} \qquad [2]$$

Confrontando la **[1]** e la **[2]**, notiamo che il quoziente della divisione non cambia se si dividono dividendo e divisore per uno stesso numero n diverso da zero; il resto risulta invece diviso per tale numero.

ESEMPIO

Per eseguire la divisione $(3x^2 - 2x + 1) : (2x - 1)$ utilizzando la regola di Ruffini, dobbiamo dividere il dividendo e il divisore per il coefficiente del termine di primo grado del divisore (nel nostro caso 2). Seguendo lo schema di Ruffini otteniamo lo svolgimento riportato qui accanto.

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8}
\end{array}$$

- Il quoziente della divisione $(3x^2 - 2x + 1) : (2x - 1)$ è allora $Q(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.
- Per quanto riguarda il resto, dallo schema si ha che $\frac{R}{2} = \frac{3}{8}$, quindi il resto della divisione è $R = \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$.

È possibile utilizzare la regola di Ruffini anche nel caso in cui i coefficienti dei polinomi dividendo e divisore siano letterali.

ESEMPIO 1

Eseguiamo la divisione tra i seguenti polinomi nella variabile x:

$A(x) = 4x^3 - 3ax^2 - 6a^2x - 7a^3$

$B(x) = x - 2a$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 4 & -3a & -6a^2 & -7a^3 \\
2a & & 8a & 10a^2 & 8a^3 \\
\hline
 & 4 & 5a & 4a^2 & a^3
\end{array}$$

- Poiché il polinomio $B(x)$ è di primo grado, possiamo usare la regola di Ruffini. Seguendo il procedimento noto otteniamo lo svolgimento riportato qui accanto.
- Il quoziente della divisione è $Q(x) = 4x^2 + 5ax + 4a^2$ e il resto è $R = a^3$.

ESEMPIO 2

Eseguiamo di nuovo la divisione dell'esempio precedente considerando questa volta a come variabile e x come costante. Ordiniamo i due polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile a e otteniamo:

$A(a) = -7a^3 - 6xa^2 - 3x^2a + 4x^3 \qquad B(a) = -2a + x$

- Poiché il coefficiente di a nel binomio $B(a)$ è -2, per poter eseguire la divisione con la regola di Ruffini dividiamo dividendo e divisore per -2. Si ha:

$$\frac{A(a)}{-2} = \frac{7}{2}a^3 + 3xa^2 + \frac{3}{2}x^2a - 2x^3 \qquad \frac{B(a)}{-2} = a - \frac{x}{2}$$

- Seguendo il procedimento noto, otteniamo il quoziente:

$$Q(a) = \frac{7}{2}a^2 + \frac{19}{4}xa + \frac{31}{8}x^2$$

e il resto della divisione:

$$R = -\frac{1}{16}x^3(-2) = \frac{1}{8}x^3.$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & \frac{7}{2} & 3x & \frac{3}{2}x^2 & -2x^3 \\
\frac{x}{2} & & \frac{7}{4}x & \frac{19}{8}x^2 & \frac{31}{16}x^3 \\
\hline
 & \frac{7}{2} & \frac{19}{4}x & \frac{31}{8}x^2 & -\frac{1}{16}x^3
\end{array}$$