1 Divisione tra polinomi in una sola variabile

ESERCIZI pag. 398

Studiando i numeri naturali abbiamo visto che la divisione tra un numero a e un numero b diverso da 0 dà come quoziente q e come resto r. Abbiamo allora potuto scrivere $a = b \cdot q + r$, con $r < b$.
Il procedimento usato per eseguire la divisione tra polinomi è simile a quello della divisione tra numeri.
In questo paragrafo impariamo la regola per eseguire la divisione tra due polinomi con una sola lettera, che chiamiamo **variabile**.

In generale, per specificare la variabile del polinomio A, si fa seguire il polinomio A da una parentesi tonda che contiene tale variabile.
Ad esempio, il polinomio $3x^3 + 1 - 2x + 2x^2$ contiene come variabile la lettera x. Indichiamo tale polinomio con $A(x)$, che si legge «A di x».
Possiamo scrivere allora $A(x) = 3x^3 + 1 - 2x + 2x^2$.

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Se $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x)$ diverso da 0, sono due polinomi nella variabile x e se il grado di $A(x)$ è maggiore o uguale al grado di $B(x)$, esistono sempre due soli polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, con la condizione che il grado di $R(x)$ sia minore del grado di $B(x)$.

OSSERVA

Nella scrittura $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, $Q(x)$ è il polinomio quoziente della divisione tra il polinomio dividendo $A(x)$ e il polinomio divisore $B(x)$; $R(x)$ è il polinomio resto della divisione.

- $A(x)$ è detto **dividendo** della divisione.
- $B(x)$ è detto **divisore** della divisione.
- $Q(x)$ è detto **quoziente** della divisione.
- $R(x)$ è detto **resto** della divisione.
- Se $R(x) = 0$, diciamo che $A(x)$ è **divisibile** per $B(x)$.
- Se $A(x)$ ha grado n e $B(x)$ ha grado m, con $n \geqslant m$, allora:
  - $Q(x)$ ha grado $n - m$;
  - $R(x)$ ha grado minore di m.

Divisione tra polinomi in una sola variabile con coefficienti numerici

Illustriamo con un esempio il procedimento che dobbiamo seguire per determinare il quoziente e il resto della divisione tra due polinomi.

ESEMPIO

Vogliamo eseguire la divisione tra il polinomio $A(x) = 3x^3 + 1 - 2x + 2x^2$ e il polinomio $B(x) = x^2 + 2x - 1$.

- Ordiniamo i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile x e predisponiamo lo schema a lato.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5} & & & & \end{array}$$

- Eseguiamo la divisione tra il primo termine del polinomio dividendo ($3x^3$) e il primo termine del polinomio divisore (x^2); il monomio che troviamo ($3x$) è il primo termine del quoziente.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5} & & & & 3x \end{array}$$

- Moltiplichiamo il primo termine del polinomio quoziente ($3x$) per ogni termine del polinomio divisore ($x^2 + 2x - 1$) e sommiamo al polinomio dividendo ($3x^3 + 2x^2 - 2x + 1$) il polinomio ottenuto, cambiato di segno ($-3x^3 - 6x^2 + 3x$). Il polinomio che troviamo ($-4x^2 + x + 1$) è il primo resto parziale.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5} -3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x \\ \cline{1-4} // & -4x^2 & +x & +1 & \end{array}$$

- Il grado del primo resto parziale è uguale al grado del polinomio divisore; possiamo eseguire ancora la divisione tra $-4x^2 + x + 1$ e $x^2 + 2x - 1$: eseguiamo la divisione tra il primo termine del primo resto parziale ($-4x^2$) e il primo termine del polinomio divisore (x^2); il monomio che troviamo (-4) è il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5} 3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x-4 \\ \cline{1-4} // & -4x^2 & +x & +1 & \end{array}$$

- Moltiplichiamo il secondo termine del quoziente (-4) per ogni termine del polinomio divisore e sommiamo al primo resto parziale il polinomio ottenuto, cambiato di segno ($4x^2 + 8x - 4$). Il polinomio che troviamo ($9x - 3$) è il secondo resto parziale.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5} 3x^3 & -6x^2 & +3x & & 3x-4 \\ \cline{1-4} // & -4x^2 & +x & +1 & \\ & +4x^2 & +8x & -4 & \\ \cline{2-4} & // & +9x & -3 & \end{array}$$

- Il grado del secondo resto parziale è minore del grado del polinomio divisore. La divisione ha pertanto termine.

Concludendo, la divisione tra il polinomio $A(x) = 3x^3 + 1 - 2x + 2x^2$ e il polinomio $B(x) = x^2 + 2x - 1$ ha come quoziente il polinomio $Q(x) = 3x - 4$ e come resto il polinomio $R(x) = 9x - 3$.

Riprendendo le considerazioni fatte all'inizio del paragrafo, verifichiamo che è vera l'uguaglianza:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} B(x) \cdot Q(x) + R(x) &= (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x - 4) + 9x - 3 = \\ &= 3x^3 - 4x^2 + 6x^2 - 8x - 3x + 4 + 9x - 3 = \\ &= 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto il polinomio $A(x)$. Pertanto l'uguaglianza è verificata.

Se il polinomio dividendo non è completo, prima di eseguire la divisione aggiungiamo i termini mancanti con coefficiente zero.

ESEMPIO

Vogliamo calcolare quoziente e resto della divisione del polinomio $A(x) = 4x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 1$ per il polinomio $B(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Poiché $A(x)$ è un polinomio incompleto, aggiungeremo uno zero al posto del termine di quarto grado e uno zero al posto del termine di primo grado; in questo modo avremo meno difficoltà a incolonnare i termini simili.

$+4x^5$	$+0x^4$	$-3x^3$	$+5x^2$	$+0x$	-1	$2x^2 - x + 3$
$-4x^5$	$+2x^4$	$-6x^3$				$2x^3 + x^2 - 4x - 1$
//	$+2x^4$	$-9x^3$	$+5x^2$	$+0x$	-1	
	$-2x^4$	$+x^3$	$-3x^2$			
	//	$-8x^3$	$+2x^2$	$+0x$	-1	
		$+8x^3$	$-4x^2$	$+12x$		
		//	$-2x^2$	$+12x$	-1	
			$+2x^2$	$-x$	$+3$	
			//	$+11x$	$+2$	

- La divisione ha come quoziente il polinomio $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 1$ e come resto il polinomio $R(x) = 11x + 2$.

RICORDA

Un polinomio è completo rispetto a una lettera se, ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera, contiene tutte le potenze, da quella più grande al termine noto (esponente 0).

Divisione tra polinomi con coefficienti letterali

Vogliamo ora eseguire una divisione in cui i polinomi dividendo e divisore contengono coefficienti letterali. Valgono le stesse regole usate per la divisione tra polinomi con coefficienti numerici.

ESEMPIO

Per eseguire la divisione tra i due polinomi nella variabile x

$A(x) = 3x^3 - 3ax^2 + 2a^2x + 5a^3$

$B(x) = x^2 - 2ax + a^2$

seguiamo il procedimento noto.

$3x^3$	$-3ax^2$	$+2a^2x$	$+5a^3$	$x^2 - 2ax + a^2$
$-3x^3$	$+6ax^2$	$-3a^2x$		$3x + 3a$
//	$+3ax^2$	$-a^2x$	$+5a^3$	
	$-3ax^2$	$+6a^2x$	$-3a^3$	
	//	$5a^2x$	$+2a^3$	

- Il quoziente della divisione è $Q(x) = 3x + 3a$ e il resto è $R(x) = 5a^2x + 2a^3$.
- Osserviamo che i polinomi considerati contengono due lettere; la divisione è stata eseguita scegliendo x come variabile e a come costante.

- Possiamo fare la scelta opposta; in tal caso, la divisione viene effettuata ordinando i due polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile a; i due polinomi ordinati sono allora:

$A(a) = 5a^3 + 2a^2x - 3ax^2 + 3x^3$
$B(a) = a^2 - 2ax + x^2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5a^3 & +2a^2x & -3ax^2 & +3x^3 & a^2 - 2ax + x^2 \\ \cline{5-5}
-5a^3 & +10a^2x & -5ax^2 & & 5a + 12x \\ \cline{1-4}
// & +12a^2x & -8ax^2 & +3x^3 & \\
 & -12a^2x & +24ax^2 & -12x^3 & \\ \cline{2-4}
 & // & +16ax^2 & -9x^3 &
\end{array}
$$

- Seguendo il procedimento noto, otteniamo che il quoziente della divisione è $Q(a) = 5a + 12x$ e il resto è $R(a) = 16ax^2 - 9x^3$.

In generale, quando si deve eseguire una divisione tra due polinomi che contengono più lettere, bisogna precisare quale lettera è da considerare come variabile e quali vanno considerate come costanti. I polinomi devono essere ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile.
Possiamo osservare che il risultato cambia scambiando la variabile con un parametro solo se la divisione ha un resto diverso da zero, mentre ciò non accade in caso contrario.

ESEMPIO

La divisione $(2a^4 - 9a^3b + 10a^2b^2 - 3ab^3) : (a^2 - 3ab)$ contiene due lettere ed è ordinabile secondo le potenze decrescenti sia di a sia di b.

1. Eseguiamo la divisione ordinando i due polinomi secondo le potenze decrescenti di a:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2a^4 & -9a^3b & +10a^2b^2 & -3ab^3 & a^2 - 3ab \\ \cline{5-5}
-2a^4 & +6a^3b & & & 2a^2 - 3ab + b^2 \\ \cline{1-4}
// & -3a^3b & +10a^2b^2 & & \\
 & +3a^3b & -9a^2b^2 & & \\ \cline{2-4}
 & // & +a^2b^2 & -3ab^3 & \\
 & & -a^2b^2 & +3ab^3 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

$Q(a) = 2a^2 - 3ab + b^2$
$R = 0$

2. Eseguiamo la divisione ordinando i due polinomi secondo le potenze decrescenti di b:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-3ab^3 & +10a^2b^2 & -9a^3b & +2a^4 & -3ab + a^2 \\ \cline{5-5}
+3ab^3 & -a^2b^2 & & & b^2 - 3ab + 2a^2 \\ \cline{1-4}
// & +9a^2b^2 & -9a^3b & & \\
 & -9a^2b^2 & +3a^3b & & \\ \cline{2-4}
 & // & -6a^3b & +2a^4 & \\
 & & +6a^3b & -2a^4 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

$Q(a) = b^2 - 3ab + 2a^2$
$R = 0$

Confrontando i risultati delle due divisioni osserviamo che hanno entrambe resto zero e che i due quozienti sono tra loro uguali.