# 3 Operazioni con i monomi

ESERCIZI pag. 323

Ci proponiamo ora di operare con i monomi. Esaminiamo le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza.

## Addizione e sottrazione: la somma algebrica

Dati i monomi $4xy$ e $-\frac{3}{4}ab$, indichiamo la loro somma con l'espressione $(4xy)+\left(-\frac{3}{4}ab\right)$, che possiamo anche scrivere, ricordando le proprietà studiate a proposito dei numeri relativi, come $4xy-\frac{3}{4}ab$.

Allo stesso modo consideriamo i due monomi $3xy$ e $-5xy$; indichiamo la loro somma con l'espressione $(3xy) + (-5xy)$, che possiamo anche scrivere, analogamente a quanto fatto qui sopra, come $3xy - 5xy$.
Applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$3xy - 5xy = (3 - 5)xy = -2xy.$$

In questo caso abbiamo ridotto la somma di due monomi a un monomio solo; ciò è stato possibile perché i monomi assegnati sono simili.

Diamo allora la definizione seguente.

**Definizione**

La **somma di due o più monomi simili** è un monomio simile ai monomi dati che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

**OSSERVA**

L'insieme dei monomi non è chiuso rispetto all'addizione e alla sottrazione, infatti la somma di due monomi non simili non è un monomio.

Per l'addizione tra monomi simili valgono le proprietà associativa e commutativa.
0 è l'elemento neutro. L'inverso di un monomio è il monomio opposto.

Seguendo il ragionamento fatto per l'addizione, possiamo scrivere la definizione seguente.

**Definizione**

La **differenza di due monomi simili** è un monomio simile ai monomi dati che ha per coefficiente la differenza tra il coefficiente del primo monomio e quello del secondo.

**ESEMPIO**

Vogliamo calcolare la differenza dei monomi $3xy$ e $-5xy$.

▶ Scriviamo $(3xy) - (-5xy) = [3 - (-5)]xy = (3 + 5)xy = 8xy$.

La sottrazione di due monomi simili è la somma del primo monomio con l'opposto del secondo; la sottrazione tra due monomi si può quindi ricondurre a un'addizione.
Parleremo di **somma algebrica** tra monomi, intendendo con questo termine sia l'operazione di addizione sia quella di sottrazione.
Proponiamo ora come esempi alcune espressioni in cui compaiono somme algebriche di monomi.

**OSSERVA**

La somma di due monomi opposti è 0.

**ESEMPIO 1**

$$\left(\frac{1}{3}px\right)+\left(-\frac{4}{3}px\right)-\left(\frac{2}{3}px\right)=\frac{1}{3}px-\frac{4}{3}px-\frac{2}{3}px=\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)px=-\frac{5}{3}px$$

**ESEMPIO 2**

$$(5ab^3)+(-3ab^3)-(-2a^3b)+\left(-\frac{3}{2}ab^3\right)-(+7ab^3)-(2a^3b)=$$

$$=5ab^3-3ab^3\cancel{+2a^3b}-\frac{3}{2}ab^3-7ab^3\cancel{-2a^3b}=\left(5-3-\frac{3}{2}-7\right)ab^3=-\frac{13}{2}ab^3$$

**ESEMPIO 3**

$$(\cancel{4xy})+(\cancel{-4xy})-(-5x^2)+(-2x^2)=5x^2-2x^2=3x^2$$

## Moltiplicazione

Consideriamo i monomi $3x^2y^3$ e $-2x^3yz$. Indichiamo il loro prodotto con $(3x^2y^3)\cdot(-2x^3yz)$, che, per la definizione di monomio e le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione, possiamo anche scrivere $3(-2)x^2y^3x^3yz=-6x^5y^4z$. Il prodotto di due monomi è quindi ancora un monomio.

Diamo allora la definizione seguente.

**Definizione**

Il **prodotto di due o più monomi** è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

**OSSERVA**
L'insieme dei monomi è chiuso rispetto alla moltiplicazione.

Per la moltiplicazione tra monomi valgono le proprietà associativa e commutativa.
1 è l'elemento neutro; 0 è l'elemento assorbente.

Per calcolare il monomio prodotto di due o più monomi si opera nel seguente modo:

1. si calcola il coefficiente moltiplicando tra loro i coefficienti dei monomi fattori;
2. utilizzando la proprietà delle potenze di uguale base si ottiene la parte letterale. Nel monomio prodotto, dunque, ogni lettera compare con esponente uguale alla somma degli esponenti posseduti da quella lettera nei singoli monomi fattori.

**RICORDA**
Proprietà delle potenze:
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$.

**ESEMPI**

1. $(3x^2y)\cdot\left(-\frac{2}{3}x^3z^4\right)=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^2x^3yz^4=-2x^5yz^4$
2. $\left(-\frac{1}{7}abc^2\right)\cdot\left(\frac{49}{18}a^2b^4\right)\cdot\left(-\frac{9}{7}ac^5\right)=\left(-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{49}{18}\right)\left(-\frac{9}{7}\right)abc^2a^2b^4ac^5=\frac{1}{2}a^4b^5c^7$
3. $\left(-\frac{1}{4}ax^2\right)\cdot 0=0$

Osserviamo che:

- il grado del prodotto di due o più monomi non nulli è uguale alla somma dei gradi dei monomi fattori;
- se almeno un fattore è il monomio nullo, il prodotto è il monomio nullo.

## Divisione

**Definizione**

Si dice che **un monomio è divisibile per un altro monomio**, non nullo, quando esiste un terzo monomio che, moltiplicato per il secondo, dà come risultato il primo.

Consideriamo i monomi $8x^3t^4$ e $-2xt^2$. Ci chiediamo se esiste un monomio che, moltiplicato per $-2xt^2$, dia il monomio $8x^3t^4$. Il monomio che soddisfa la nostra richiesta è $-4x^2t^2$. Infatti $-2xt^2 \cdot (-4x^2t^2) = 8x^3t^4$.
$8x^3t^4$ è allora divisibile per $-2xt^2$.

È facile osservare invece che, assegnati i monomi $x$ e $x^3$, non esiste alcun monomio che, moltiplicato per $x^3$, dia come risultato $x$; $x$ non è perciò divisibile per $x^3$.

Dalla definizione segue che un monomio $A$ è divisibile per un monomio $B$ se e solo se:

- ogni lettera del divisore $B$ compare anche nel monomio dividendo $A$;
- gli esponenti di ogni lettera del divisore $B$ sono minori o uguali a quelli posseduti dalle corrispondenti lettere del dividendo $A$.

Possiamo allora dare la definizione seguente.

**Definizione**

Il **quoziente di due monomi**, presi in un dato ordine, il primo dei quali divisibile per il secondo e il secondo non nullo, è un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei due coefficienti e per parte letterale il quoziente delle parti letterali.

Per calcolare il monomio quoziente di due monomi si opera nel seguente modo:

1. si calcola il coefficiente effettuando la divisione del coefficiente del monomio dividendo con il coefficiente del monomio divisore;
2. utilizzando la proprietà delle potenze di ugual base si ottiene la parte letterale. Nel monomio quoziente, dunque, ogni lettera compare con esponente uguale alla differenza degli esponenti posseduti da quella lettera, nell'ordine, nel monomio dividendo e nel monomio divisore.

**ESEMPI**

1. $(4x^3y^2) : (-2xy) = -2x^2y$
2. $\left(\frac{3}{5}x^3y^4\right) : \left(-\frac{9}{5}xy^2\right) = -\frac{1}{3}x^2y^2$
3. $(ab^3) : \left(-\frac{1}{2}b^2\right) = -2ab$
4. $3a^2b^5 : 2ab^2 = \frac{3}{2}ab^3$

Osserviamo che:

- nella divisione tra monomi, il monomio divisore deve essere scritto tra parentesi tonde. Altrimenti, per le proprietà della moltiplicazione e della divisione, deve essere considerato come divisore solo il primo termine del monomio divisore;
- il grado del quoziente è uguale alla differenza tra il grado del dividendo e quello del divisore.

## Elevamento a potenza

**Definizione**

La **potenza *n*-esima di un monomio**, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$, è un monomio, prodotto di $n$ fattori uguali al monomio stesso.

Per ogni monomio $A$ non nullo si ha: $A^0 = 1$.

Per ogni monomio $A$ si ha: $A^1 = A$.

**OSSERVA**
L'insieme dei monomi non è chiuso rispetto alla divisione.

**RICORDA**
Proprietà delle potenze:
$a^n : a^m = a^{n-m}$, con $n \geqslant m$.

**OSSERVA**
L'insieme dei monomi è chiuso rispetto all'elevamento a potenza con esponente intero positivo.

Pertanto, per elevare a potenza $n$-esima un monomio, si opera nel seguente modo:
1. si eleva alla potenza $n$-esima il coefficiente;
2. si moltiplica per $n$ ogni esponente delle lettere contenute nella parte letterale.

RICORDA
Proprietà delle potenze:
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

**ESEMPI**

1. $(2a^2b^5x)^4 = 16a^8b^{20}x^4$
2. $\left(-\frac{1}{3}a^2b^4\right)^2 = \frac{1}{9}a^4b^8$
3. $(-xy^2z)^3 = -x^3y^6z^3$
4. $\left(-\frac{5}{2}x^4yz^3\right)^3 = -\frac{125}{8}x^{12}y^3z^9$

## Espressioni con i monomi

Ci proponiamo ora di risolvere espressioni in cui compaiono i monomi e le operazioni tra essi. Poiché i monomi rappresentano numeri, dobbiamo tenere presenti tutte le regole relative alla semplificazione delle espressioni numeriche e riguardanti la priorità delle operazioni e l'uso delle parentesi.

**ESEMPIO 1**

$$4x^2y^3 + \left(-\frac{3}{2}x^4y^2\right)^2 : \left(-\frac{1}{4}x^6y\right) + [-(-3xy)^2 : (xy) + xy] \cdot (-xy^2) =$$

- Eleviamo a potenza: $= 4x^2y^3 + \frac{9}{4}x^8y^4 : \left(-\frac{1}{4}x^6y\right) + [-(9x^2y^2) : (xy) + xy] \cdot (-xy^2) =$
- Eseguiamo le divisioni: $= 4x^2y^3 - 9x^2y^3 + [-9xy + xy] \cdot (-xy^2) =$
- Eseguiamo l'operazione nella parentesi quadra: $= 4x^2y^3 - 9x^2y^3 - 8xy \cdot (-xy^2) =$
- Eseguiamo la moltiplicazione: $= 4x^2y^3 - 9x^2y^3 + 8x^2y^3 =$
- Riduciamo i monomi simili: $= 3x^2y^3$

**ESEMPIO 2**

$$3a + \left[\left(\frac{1}{2}a^3b^2\right)^2 : \left(-\frac{1}{8}a^3b\right) - \left(-\frac{2}{3}ab\right)(-3ab)^2\right] : (a^2b^3) - (-2a^2b)^3 : (-a^5b^3) =$$

- Eleviamo a potenza: $= 3a + \left[\frac{1}{4}a^6b^4 : \left(-\frac{1}{8}a^3b\right) - \left(-\frac{2}{3}ab\right)(+9a^2b^2)\right] : (a^2b^3) - (-8a^6b^3) : (-a^5b^3) =$
- Eseguiamo moltiplicazioni e divisioni: $= 3a + [-2a^3b^3 + 6a^3b^3] : (a^2b^3) - 8a =$
- Eseguiamo le operazioni nella parentesi quadra: $= 3a + 4a^3b^3 : (a^2b^3) - 8a =$
- Eseguiamo la divisione: $= 3a + 4a - 8a =$
- Riduciamo i termini simili: $= -a$