1 Il calcolo letterale

ESERCIZI pag. 318

Nel corso dei tuoi studi hai già avuto modo di incontrare e utilizzare formule matematiche in cui compaiono operazioni che legano tra loro lettere e numeri.
Ad esempio, se vogliamo trovare l'area della superficie di un cerchio di raggio r, scriviamo πr^2; se vogliamo trovare il perimetro di un quadrato di lato l, scriviamo $4l$; oppure, per calcolare l'area di un trapezio di cui conosciamo la misura delle basi B e b e dell'altezza h, scriviamo $\frac{1}{2}(B+b)h$.

Possiamo trovare formule matematiche anche in ambiti diversi. Se vogliamo calcolare lo spazio percorso da un'automobile che viaggia con velocità costante v in un tempo t scriviamo vt; se vogliamo calcolare il peso specifico di una sostanza di cui conosciamo il peso p e il volume V, scriviamo $\frac{p}{V}$.

Definizione

Chiamiamo **espressione algebrica** un insieme finito di operazioni tra numeri e lettere (che rappresentano numeri).

ESEMPI

Sono espressioni algebriche:

πr^2 ■ $4l$ ■ $\frac{1}{2}(B+b)h$ ■ vt ■ $\frac{p}{V}$ ■ $4a^2b$ ■ $4a+b^2$ ■ $\frac{3ab}{a-b}$

OSSERVA

Nella scrittura di un'espressione algebrica è sempre sottinteso il segno di moltiplicazione.
Per esempio, $4a^2b$ indica il prodotto dei tre fattori 4, a^2, b.

Per trovare il **valore numerico** di un'espressione non facciamo altro che sostituire alle lettere i numeri che di volta in volta attribuiamo a esse.

ESEMPIO 1

- Se $a=1$ e $b=2$, l'espressione $4a^2b$ vale $4\cdot(1)^2\cdot 2=8$.
- Se $a=-\frac{1}{2}$ e $b=-\frac{3}{4}$, il valore numerico dell'espressione $4a^2b$ è $4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$.

ESEMPIO 2

L'area del trapezio che ha base maggiore $B=3$ cm, base minore $b=2$ cm e altezza $h=4$ cm è $\left[\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot 4\right]\text{cm}^2=10\text{ cm}^2$.

Si può allora capire perché è utile far uso di espressioni letterali. Con una sola formula, infatti, possiamo risolvere moltissimi problemi, tutti simili tra loro. Ad esempio, con la formula πr^2 possiamo trovare l'area della superficie di infiniti cerchi: basterà infatti sostituire di volta in volta alla lettera r il valore del raggio di quel particolare cerchio che stiamo esaminando.

ESEMPIO

Se il raggio di un cerchio misura 4 cm, l'area della superficie del cerchio è 16π cm^2; se il raggio misura 3 m, l'area della superficie del cerchio è 9π m^2.

Le espressioni letterali permettono di formalizzare con precisione un problema, un fenomeno fisico, biologico o di altre scienze.

Facciamo ora alcune considerazioni.

1. All'interno di un'espressione algebrica una lettera può essere ripetuta più volte; in tal caso alla lettera è attribuito sempre lo stesso valore. Invece, due lettere diverse possono indicare sia due numeri diversi sia lo stesso numero.

ESEMPIO

Data l'espressione $\left(x+\frac{1}{2}y\right):(2x+3)$, se $x=-\frac{1}{6}$ e $y=\frac{5}{3}$ possiamo scrivere:

$$\left(x+\frac{1}{2}y\right):(2x+3)=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\right):\left[2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+3\right]=\left(-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right):\left[-\frac{1}{3}+3\right]=\frac{2}{3}:\frac{8}{3}=\frac{1}{4}$$

2. Vi sono espressioni algebriche in cui le lettere non possono assumere alcuni particolari valori perché in tali casi l'espressione perde di significato. Consideriamo il caso in cui in un'espressione compaia una frazione; una frazione indica una divisione, in cui il numeratore è il dividendo e il denominatore è il divisore. Sappiamo che il quoziente di una divisione esiste solo se il divisore è diverso da zero; quindi non è possibile attribuire alle lettere quei valori che annullano il denominatore di una frazione (o il divisore di una divisione).

ESEMPI

- Nell'espressione $\frac{3a+1}{b}$ non possiamo attribuire alla lettera b il valore zero.
- Nell'espressione $\frac{3ab}{a-b}$ non possiamo attribuire lo stesso valore alle lettere a e b.
- Nell'espressione $\frac{5x}{x-3}$ la lettera x non può assumere il valore 3.

3. In un'espressione algebrica chiamiamo **costanti** i numeri e **variabili** quelle lettere alle quali possiamo attribuire valori diversi.

ESEMPIO

Per trovare la lunghezza di una circonferenza di raggio r usiamo l'espressione $2\pi r$.
In essa 2 e π sono costanti (π indica un numero ben preciso, il cui valore approssimato a meno di $\frac{1}{100}$ è 3,14), mentre r è variabile.

A questo punto abbiamo imparato che tutte le lettere che compaiono in un'espressione letterale rappresentano dei numeri. Diventa allora importante lo studio del **calcolo letterale**, cioè lo studio delle regole di calcolo da applicare quando i numeri sono espressi mediante lettere.
In questa Unità e nelle successive impareremo a operare con i **monomi** e con i **polinomi**, che sono particolari espressioni letterali.