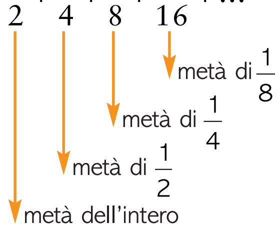
Serie e formiche

Abbiamo visto come si possono eseguire operazioni con le frazioni, ma vi sono alcune operazioni «un po' strane».
Pensiamo, ad esempio, all'addizione di frazioni che sono una la metà della precedente, partendo da $\frac{1}{2}$ che è la metà di un intero:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$



Proviamo a calcolare la somma delle prime due frazioni, poi delle prime tre, delle prime quattro e così via:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{8+4+2+1}{16}=\frac{15}{16}$$

Come si può notare, il risultato è sempre una frazione che ha al denominatore il denominatore dell'ultimo addendo e al numeratore una unità in meno del denominatore. Quindi:

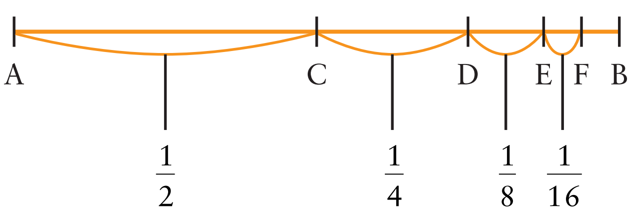
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{4096}=\frac{4095}{4096}$$

e così via.

Ma quanti termini possiamo addizionare? Infiniti poiché, data una frazione, ne esiste sempre un'altra che è la sua metà (occorre ricordare che con le frazioni la divisione è sempre possibile e calcolare la metà significa dividere per 2). Otteniamo in tal modo una **serie**, ovvero un'addizione di infiniti termini:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

E quale sarà la somma della serie da noi considerata?
La storiella che segue e la relativa rappresentazione grafica ci aiuteranno a capire.



Immaginiamo una formica che debba percorrere un tratto di strada (AB) di lunghezza pari a 1 metro. La formica percorre prima metà della strada $\left(\frac{1}{2}\right)$ e arriva nel punto C; poi percorre metà della strada che le rimane da percorrere, ovvero metà del tratto CB, e arriva nel punto D; il secondo tratto è $\frac{1}{4}$ della strada totale. Nel terzo tratto percorre la metà della strada che ancora le rimane (quindi $\frac{1}{8}$ della strada totale) e arriva così nel punto E.

Possiamo chiederci se la formica arriverà mai alla fine della strada. L'intuito ci fa rispondere senz'altro di sì, perciò possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots=1$$

1 è l'intero tratto di strada AB

La somma di un numero infinito di frazioni è dunque un numero finito (1) e una serie che ha un risultato finito si dice **serie convergente**.

Quella che abbiamo visto non è certo l'unica serie convergente: ne esistono infinite altre. C'è però una formula che ci permette di trovare altre serie convergenti e di sapere anche qual è la relativa somma:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots=\frac{1}{n-1}$$

n è un qualsiasi numero naturale (nell'esempio considerato $n = 2$).

Se $n = 3$ la serie diventa:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

Se $n = 4$ la serie diventa:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$$

Scegli ora a piacere il valore di n e scrivi altre due serie, con il relativo risultato.